POLÍGONOS DE NEWTON EN ACORDES TROPICALES Y p-ÁDICOS

EDGAR ARMANDO DELGADO VEGA

Resumen. Este artículo propone una forma de transición por analogía no estricta de la circunferencia de clases de tono $\mathbb{Z}_{12}$ hacia un espacio tropical y p-ádico, para los acordes mediante polígonos de Newton con una finalidad compositiva y de análisis musical.

Primero se muestra la búsqueda de un estudio de funciones continuas sobre la estructura discreta de los acordes que encalla en la asociación con el álgebra de los polinomios por medio de los polígonos de Newton, extendiéndose por tropicalización hacia diferentes representaciones geométricas de los acordes.

Luego, se discuten las posibilidades combinatorias que proveerían una analogía biunívoca entre los acordes y la geometría tropical, explorando la progresión II-V-I del jazz. Se presenta un ejercicio y cuestiones sobre la suma de Minkowski de dos polígonos de Newton asociados a acordes y sobre las transformaciones lineales tropicales que inducen isometrías musicales.

Por otra parte, las amebas muestran una ruta para incluir un posible mundo analítico subyacente a los acordes. Se busca la compatibilidad geométrica de los ventiladores normales interiores de los acordes de los enteros módulo 12 con las constelaciones de tonos, [Ler04].

En último lugar, se propone una construcción analógica del orden, norma y métrica p-ádica para notas y acordes. Se examina las posibilidades y restricciones para el polígono de Newton de los polinomios y se efectúa la geometría del acorde Dm en $\mathbb{Q}_3$.

Palabras clave: Polígonos de Newton, acordes musicales, progresiones armónicas, geometría tropical, números p-ádicos, composición.

Índice

1. Introducción

Desde la aparición de los trabajos seminales de [Lew10, Maz12], que introducen el lenguaje de las matemáticas estructurales, han proliferado los modelos de representación geométrica para determinados objetos musicales a los que se les interpreta bajo una teoría; como la teoría de categorías en el performance musical [MA07]; el estudio de propiedades topológicas y combinatorias como los complejos celulares en [Big13]; la teoría de grafos y trenzas en el estudio de las escalas modales, [BP13]; la transformada discreta de Fourier, [Ami16]; teoría de nudos en [Man18], por citar algunos.

Este artículo propone abrir un nuevo espacio teórico para el análisis y la composición con la hipótesis de una geometría tropical implícita en los acordes y progresiones armónicas desde el punto de vista geométrico. Primero se construirán las analogías de menor semejanza que permiten pasar de lo discreto a lo continuo a través de polinomios de segundo o tercer grado con coeficientes en $\mathbb{Z}_{12}$; donde por substitución analógica se usarán para un desarrollo tropical y p-ádico.

Se continúa con la analogía más fuerte y su modificación para hallar la compatibilidad con la definición de politopo de Newton y su representación en el espacio $\mathbb{Z}^2$ mediante polinomios en dos variables. Se discute las combinaciones de las indeterminadas y exponentes de acuerdo a las nociones de conexión y audición musical. Se grafica la progresión típica del Jazz II-V-I bajo los modelos de polinomios y se discute la posibilidad de matrices tropicales en las isometrías planas musicales. Las amebas se introducen para pensar un entorno analítico subyacente al entorno musical del acorde.

Por último, se expone una comparativa entre el ventilador normal del polígono de Newton respecto a las constelaciones de tonos de un acorde. Se concluye con la idea de un desarrollo p-ádico para acordes en forma polinomial con la gráfica de Dm sobre $\mathbb{Q}_3$ y con una aplicación a la complejidad de la métrica musical.

2. Polinomios y geometrías asociadas al acorde

En el libro [ASAALP$^+$12], se muestra una asociación habitual para las notas de la escala cromática con los enteros módulo 12 de la siguiente manera: $C \mapsto 0$, $C\sharp - D\flat \mapsto 1$, $D \mapsto 2$, $D\sharp - E\flat \mapsto 3$, $E \mapsto 4$, $F \mapsto 5$, $F\sharp - G\flat \mapsto 6$, $G \mapsto 7$, $G\sharp - A\flat \mapsto 8$, $A \mapsto 9$, $A\sharp - B\flat \mapsto 10$, $B \mapsto 11$.

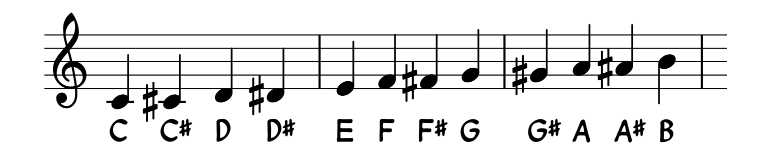


Figura 1. Escala cromática

La búsqueda de nuevos espacios con resultados útiles para los acordes, sobre los cuales se puede aplicar conceptos ajenos a la actividad musical se exploran por las analogías planteadas en las siguientes subsecciones.

2.1. Asociación con el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_{12}[X]$. Se asocia el anillo de polinomios sobre los enteros módulo 12, donde cada coeficiente representa una nota musical[1]. Esta búsqueda intenta aproximar un ambiente continuo a los acordes de 3 y 4 notas. La primera dificultad se encuentra con las definiciones de acordes como funciones polinomiales o su combinación en funciones racionales.

[1]Esta asociación directa se da con fecha anterior a la lectura de [Ami16].

Dos preguntas para realizar una analogía más estricta: ¿Qué grados deben tener los polinomios? ¿Cuántos términos deben tener los polinomios para cada tipo de acorde?

Definición 2.1. Un acorde de triada corresponde a un polinomio de segundo grado en la indeterminada X sobre el anillo de los enteros módulo 12 de la forma

$$P = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{Z}_{12}$$

cuyo coeficiente principal a es la tónica, b es la tercera y c es la quinta del acorde.

Ejemplo 2.2. El polinomio asociado a la triada de re menor es

$$P_{Dm} = 2x^2 + 5x + 9$$

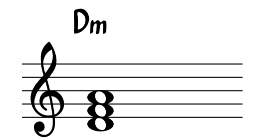


FIGURA 2. Acorde Dm

De manera análoga se da la definición para acordes de séptima o de cuatro notas.

Definición 2.3. Un acorde de séptima corresponde a un polinomio de tercer grado en la indeterminada X sobre el anillo de los enteros módulo 12 de la forma

$$P = ax^3 + bx^2 + cx + d : a, b, c \ y \ d \in \mathbb{Z}_{12}$$

cuyo coeficiente principal a es la tónica, b es la tercera, c es la quinta y d la séptima del acorde.

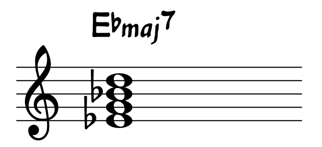


FIGURA 3. Ebmaj7

Ejemplo 2.4. El polinomio asociado al acorde de E♭maj7 es

$$P_{E\flat maj7} = 3x^3 + 7x^2 + 10x + 2$$

Las operaciones con los polinomios correspondientes a los acordes se realizan de la manera usual. Como ejemplo se suman las triadas de

$$P_{Dm} + \ Q_C \equiv mod\ 12 \ = 2x^2 + 9x + 4 = R_{Asus4}$$

El acorde resultante es Asus4 al reordenar los monomios y considerar solo los coeficientes y no el grado y orden del polinomio. Sin embargo, no toda operación del anillo produce un acorde musical convencional. Cabe mencionar en este punto la forma de expresión de un acorde como vector columna y las probabilidades de estudio (combinaciones lineales, entre otras) bajo este acercamiento en la sección 5 del artículo [FN16] y en otras ideas en la sección 2.3 del presente trabajo.

Una de las preguntas que surge por analogía frente a la circunferencia de clases de tonos además de las simetrías ampliamente estudiadas, es la noción del área en los acordes. Para realizar esta incursión se tomará a los polinomios de los acordes $P \in \mathbb{Z}_{12}[X]$ y se les asociará funciones polinomiales $f(x)$ cuyo dominio y codominio debe restringirse a los enteros módulo 12 $Dom(f) = \mathbb{Z}_{12}$ y $Codom(f) = \mathbb{Z}_{12}$. No obstante, no resulta más que algoritmia pura evaluar la nota E♭ en $f(3) = 3x^2 + 7x + 10 = 58 \equiv 10 \ mod \ 12 \mapsto B\flat$ Por otra parte, estas restricciones dotan a las funciones de los acordes una **interpretación gráfica** curiosa que solo juega con valores enteros. Se prueba la derivación e integración sobre estos polinomios, ya que permiten en teoría obtener otros acordes.

Ejemplo 2.5. Se toma la primera derivada $f'(x)$ del acorde Dm expresado como función polinomial, que se observa en la figura 4 :

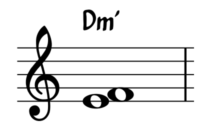


FIGURA 4. Un intervalo de segunda menor es primera derivada de Dm

$$\frac{df}{dx} \, 2x^2 + 5x + 9 = 4x + 5$$

También, la derivada formal de un polinomio no entra en conflicto con el dominio y codominio de la búsqueda musical; ésta imprime un intervalo entre dos notas. Para un acorde de séptima, imprime un acorde de triada. Siguiendo el orden del anillo y bajo la definición de triada, el 4 y 5 corresponden a la tercera y quinta del acorde respectivamente ¿Qué nota es la tónica? En caso se elige C, el acorde es Csus4. La antiderivada $\int 4x + 5 \ dx = 2x^2 + 5x + C$, donde la constante tiene valores únicamente en los enteros módulos 12, puede tomar la nota A o Bb, por lo que no representa incompatibilidad, tampoco, bajo esta operación.

Por el contrario, la integral indefinida del acorde Dm expresado como función polinomial $f \in \mathbb{Z}_{12}[X]$

$$\int 2x^2 + 5x + 9 \ dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 9x + C$$

Presenta incompatibilidad con los enteros módulo 12. **¿Anillo cociente?** Esta función es interpretable como la derivada de un acorde de séptima de 4 términos cuya estructura queda fuera del lenguaje musical convencional: ¿Acaso dentro de uno microtonal? Cabe aclarar que la evaluación de la derivada en una nota o la integral definida sobre un intervalo no tienen más que un carácter algorítmico.

2.2. Asociación geométrica con el anillo $\mathbb{C}_{z^{12}=1}[X]$. En este apartado se señalan analogías referentes al aspecto geométrico de la circunferencia unitaria del plano real y complejo por la ausencia de noción de área y sus relaciones con las clases de tonos. De manera similar a [ASAALP+12] se plantea la asociación con las coordenadas de la circunferencia trigonométrica $x^2 + y^2 = 1$, en el sentido abstracto y no acústico:

Definición 2.6 (Plano real). $C \mapsto (0,1)$, $C\sharp - D\flat \mapsto (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D \mapsto (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $D\sharp - E\flat \mapsto (1,0)$, $E \mapsto (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $F \mapsto (\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$, $F\sharp - G\flat \mapsto (0,-1)$, $G \mapsto (-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$, $G\sharp - A\flat \mapsto (\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $A \mapsto (-1,0)$, $A\sharp - B\flat \mapsto (\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $B \mapsto (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Como las notas se asocian con los enteros módulo 12 de manera analógica dada su característica unicidad, al introducir las coordenadas correspondientes a su ubicación en el plano esta analogía se relaja, ya que no puede hablarse de una nota particionada y solo conforma una notación simbólica.
Por otro lado, se define la asociación en el plano complejo y la circunferencia unitaria (como isomorfismo). Esta propuesta ha sido desarrollada ampliamente para el tratamiento con la transformada discreta de Fourier por [Ami16]. La intención de la definición siguiente es asociar las notas en un sentido puramente geométrico, por el momento.

Definición 2.7 (Plano complejo)**.** Sea la circunferencia unitaria $|z| = 1$ en el plano complejo , las notas de la escala cromática se asocian: $C \mapsto e^{i\frac{\pi}{4}}$, $C\natural - D\flat \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}$, $D \mapsto e^{i\frac{\pi}{6}}$, $D\natural - E\flat \mapsto e^{i2\pi}$, $E \mapsto e^{i\frac{11\pi}{6}}$, $F \mapsto e^{i\frac{5\pi}{3}}$, $F\natural - G\flat \mapsto e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $G \mapsto e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $G\natural - A\flat \mapsto e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $A \mapsto e^{i\pi}$, $A\natural - B\flat \mapsto e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $B \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Como se observa en [FN16], también se puede construir vectores musicales con las asociaciones de la definición 2.4. Además resulta útil buscar un isomorfismo entre el espacio de las matrices de los acordes con un espacio de polinomios.

Ejemplo 2.8. El vector columna analógico del acorde Dm y la interrogante para pasar a un espacio vectorial de polinomios como $\mathbb{R}^3 \simeq P_2$.

$$Dm = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \simeq p(x) = 9 + 5x + 2x^2$$

A raíz de este ejemplo se esboza la siguiente pregunta: ¿Es $M_{3x1}(\mathbb{Z}_{12}) \simeq P_2 \in \mathbb{Z}_{12}[X]$?

Ejemplo 2.9. El vector columna analógico del acorde fa menor séptima y el polinomio isomorfo como en el ejemplo 2.4.

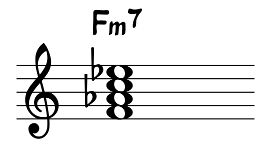


Figura 5. Acorde Fm7

$$Fm7 = \begin{bmatrix} e^{i\frac{5\pi}{3}} \\ e^{i\pi} \\ e^{i\frac{\pi}{4}} \\ e^{i\frac{11\pi}{6}} \end{bmatrix} \simeq P(x) = e^{i\frac{5\pi}{3}}x^3 + e^{i\pi}x^2 + e^{i\frac{\pi}{4}}x + e^{i\frac{11\pi}{6}} \in \mathbb{C}_{x^{12}-1}[X]$$

El problema sobre dónde debe ir en el vector la tónica o raíz del acorde es visto también en el artículo [FN16], para el cual la posición de la tónica se debe hallar por motivos de lectura en la posición a_{11} y no por analogía con su posición en el pentagrama. Un modo más económico es escribir el vector renglón (como transpuesta). Por el contrario, se puede mostrar la expansión de la expresión, si se considera la representación matricial del número complejo asociado a la nota y por ende un conjunto de varias matrices reales de 2x2 con los morfismos si se trata de acordes:

$$Nota\ G \mapsto e^{i\frac{4\pi}{3}} \mapsto \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} \rightarrowtail \begin{bmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & -\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} \\ \text{sen}\,\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{bmatrix}$$

Un acorde de triada pertenecería a $M_{6x2}(\mathbb{R})$ y un acorde de séptima pertenecería a $M_{8x2}(\mathbb{R})$. Otro enfoque es tomar matrices cuyas entradas son polinomios asociados a acordes.

$$Matriz\ de\ acordes = \begin{bmatrix} p(x)_{Dm7} \\ q(x)_{G7} \\ r(x)_{Cmaj7} \end{bmatrix} \simeq \Psi[X]$$

Este procedimiento parece llevar este trabajo hacia la manipulación puramente algorítmica. ¿Hasta qué punto es conveniente una inmersión de los conceptos musicales con estas observaciones?

Antes de iniciar la sección siguiente, se comenta algunas ideas que deviene hasta entorno. La asociación con las raíces de la unidad $X^n - 1$, polinomios característicos y ciclotómicos musicales se ve en [Ami16, 1.2.4 y 3].[2] Explora 4 álgebras isomorfas, incluyendo el álgebra de matrices circulantes, matrices diagonales, de polinomios y de distribución $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$. Su interés enfocado en la DFT y las teselaciones encamina hacia los exponentes, si se quiere pensar así. Por ejemplo, bajo su definición 1.3.1, el polinomio de la triada de C mayor es $1 + X^4 + X^7$.

3. Tropicalización de los acordes y politopos de Newton

Al idear un mundo tropical donde se desenvuelvan los acordes, un acercamiento primero, para hallar un isomorfismo, parte desde lo algebraico. Por lo que, se definen continuación los axiomas del semianillo tropical.

Definición 3.1. [Semianillo tropical] El conjunto $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ con las operaciones:

$$(x \oplus y) = mín(x, y)$$

$(\mathbb{T}, \oplus)$ forma un monoide conmutativo con identidad. La identidad se denota $0_{\mathbb{T}} = +\infty$.

$$(x \odot y) = (x + y)$$

$(\mathbb{T}, \odot)$ forma un monoide con identidad $1_{\mathbb{T}} = 0$. La multiplicación es distributiva respecto a la adición y el elemento neutro aditivo anula a $\mathbb{T}$.

Si se interpretan estos axiomas sobre algún objeto lenguaje musical occidental, los procedimientos y resultados son también exóticos. Dos fragmentos musicales no son idempotentes bajo suma, salvo que ambos sean el mismo fragmento. Por lo que, aparentemente, no se podría establecer una estructura compatible como el anillo $\mathbb{Z}_{12}$.

3.1. Polinomio tropical asociado al acorde.

Aunque la estructura axiomática no presente compatibilidad a primera vista, es posible forzar la analogía de manera simbólica, por substitución de las operaciones: transformando un polinomio f en $\mathbb{R}$ con coeficientes en los enteros módulos 12 en un polinomio tropical.

$$f = \sum_{i}^{n} a_i X^i \longrightarrow p(x) = \bigoplus_{i} a_i \odot X^i$$

Las propiedades de representación como la continuidad, concavidad y el ser funciones lineales a trozos: ¿Tiene algún significado musical? Con los acordes de triada y de séptima hará falta substituir las operaciones definidas para encontrar su expresión tropical.

[2] El libro de E. Amiot no se conocía hasta el verano del 2018, por lo que, las ideas similares y de asociación con la sección 2 de este artículo pertenecen a momentos anteriores de cultivo independiente

Ejemplo 3.2. El acorde de Dm tiene asociado el siguiente polinomio en el mundo tropical

$$P(x)_{\mathbb{T}} = 2 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \oplus 9 = \text{mín}(2x + 2, x + 5, 9)$$

Ejemplo 3.3. El acorde E♭maj7 y su respectivo polinomio tropical

$$P(x)_{\mathbb{T}} = 3 \odot x^3 \oplus 7 \odot x^2 \oplus 10 \odot x \oplus 2 = \text{mín}(3x + 3, 2x + 7, x + 10, 2)$$

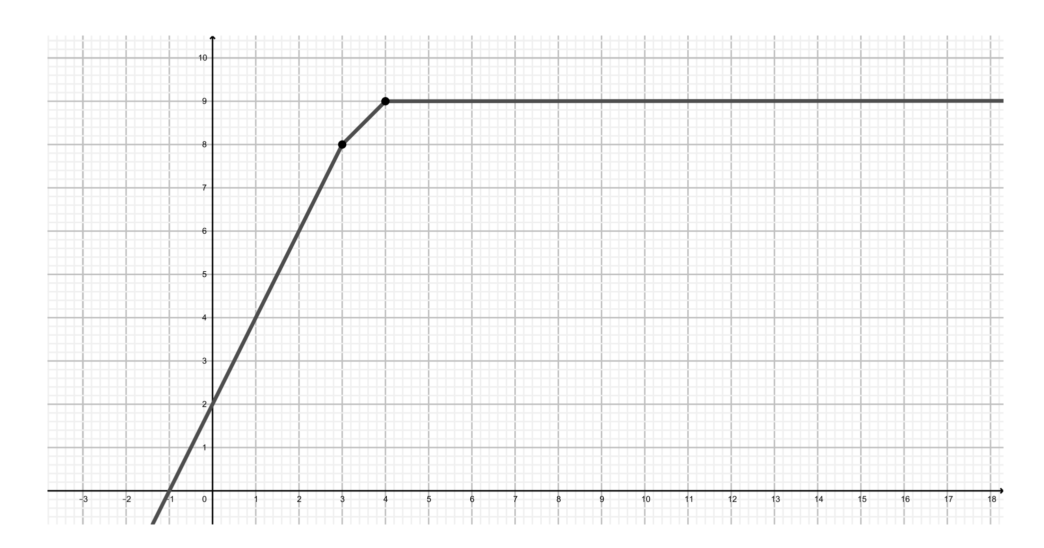


Figura 6. Polinomio tropical asociado a Dm

Definición 3.4. Las raíces de un polinomios tropicales $P(x)_{\mathbb{T}}$ son los puntos en el eje de abcisas donde la función alcanza una singularidad.

Si se expresa el polinomio en factores lineales es posible deducir las raíces. La factorización de Dm:

$$P(x) = 2 \odot (x \oplus (5 - 2)) \odot (x \oplus (9 - 5))$$

Las raíces son 3 y 4 como se observa en las abscisas de la figura 4. Una progresión armónica típica en el jazz es II - V - I. Sería interesante estudiar las raíces de sus polinomios tropicales asociados.

3.2. Polígonos de Newton asociados al acorde. La primera idea para asociar un acorde con un politopo de Newton Δf, surge de la noción geométrica 2 - dimensional por necesidad de asociar un polinomio y traer el mundo del cálculo y las funciones diferenciables al mundo de la geometría discreta, análoga en mayor proporción a lo musical abstracto de los acordes. Se tiene la circunferencia unitaria mod 12, donde 3 o 4 puntos unidos por cuerdas determinan un tipo especial de acorde musical. Si se considera a estos triángulos y cuadriláteros inscritos como los polígonos de Newton, los acordes quedan asociados, por ende, con determinado polinomio en dos variables cuya gráfica podría servir de análisis musical. Los polinomios serían mónicos y heterogéneos.

La dificultad se encuentra en la posición de los vértices del acorde fuera de la rejilla $\mathbb{Z}^2$ que no corresponde a la definición:

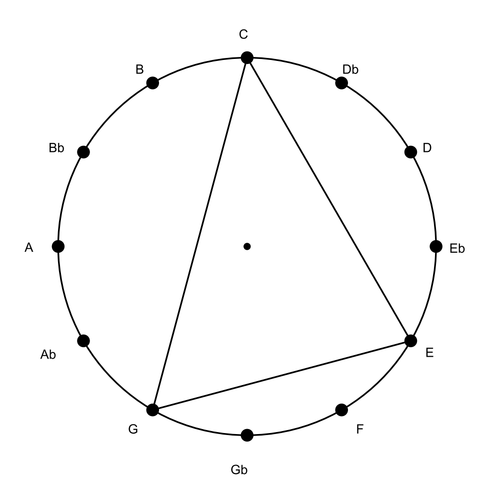


FIGURA 7. Acorde de C mayor como polígono de Newton

Definición 3.5 (Politopo de Newton Δf)**.** Sea $S = K(x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1})$ el anillo de polinomios de Laurent. *El politopo de Newton de* $f = \sum c_u x^u$ es la envolvente convexa de $u \in \mathbb{Z}^n$, $c_u \neq 0$.

Sobre el plano real y complejo los polinomios para definir Δf_C son:

$$f(x,y)_C = y + x^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{-\sqrt{3}}{2}} \in K[X^{\mathbb{R}}, Y^{\mathbb{R}}]$$

$$f(x,y)_C = y^i + x^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y^{-\frac{1}{2}i} + x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{-\sqrt{3}}{2}i} \in K[X^{\mathbb{R}}, Y^{\mathbb{C}}]$$

$$p(z)_C = z^{e^{i\frac{\pi}{2}}} + z^{e^{i\frac{11\pi}{6}}} + z^{e^{i\frac{4\pi}{3}}} \in K[Z^{\mathbb{C}}_{z^n=1}]$$

No obstante, algunos acordes -como la triada disminuida o el acorde de séptima disminuida- son perfectamente asociables a un polígono de Newton. Por ejemplo, la triada disminuida que forma un triángulo rectángulo tiene el polinomio:

$$f(x,y)_{dis^{\circ}} = y + x + y^{-}1$$

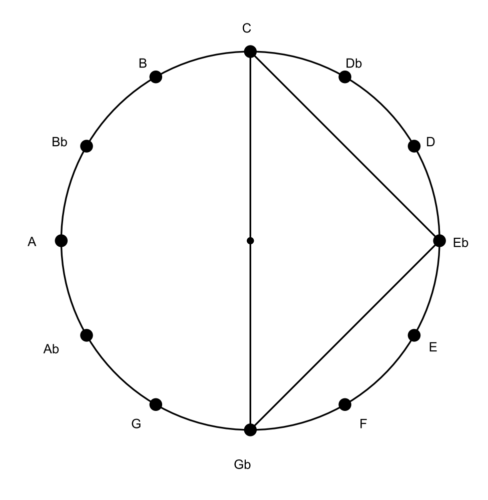


FIGURA 8. Acorde Disminuido

Como la definición permite exponentes enteros y un politopo reticular con vértices en los enteros tiene semejanza con el trabajo en $\mathbb{Z}_{12}$ es posible asociar Δf a los acordes cuyos exponentes se encuentran en este conjunto, extrapolando la geometría de la circunferencia de clases de tonos. Se propone una definición para los acordes de triada y de séptima, que luego se discutirá en función de sus propiedades combinatorias. Las letras en orden alfabético representan: $a = tónica, b = tercera, c = quinta, d = séptima$.

Definición 3.6. *[Acorde de Triada]* Un acorde de triada es un polinomio de la forma:

$$f(x, y) = x^a y^b + x^b y^c + x^a y^c;\ a, b, c, \in \mathbb{Z}_{12}$$

Definición 3.7. *[Acorde de séptima]* Un acorde de séptima es un polinomio de la forma:

$$f(x, y) = x^a y^b + x^b y^c + x^c y^d + x^a y^c + x^b y^d + x^a y^d;\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{12}$$

Ejemplo 3.8. Veremos la progresión IIm7, V7 y IM7 del jazz en polígonos de Newton.

$$f(x, y)_{Dm7} = x^2 y^5 + x^5 y^9 + x^9 y^0 + x^2 y^9 + x^5 y^0 + x^2 y^0$$
$$f(x, y)_{G7} = x^7 y^{11} + x^{11} y^2 + x^2 y^5 + x^7 y^2 + x^{11} y^5 + x^7 y^5$$
$$f(x, y)_{Cmaj7} = x^0 y^4 + x^4 y^7 + x^7 y^{11} + x^0 y^7 + x^4 y^{11} + x^0 y^{11}$$

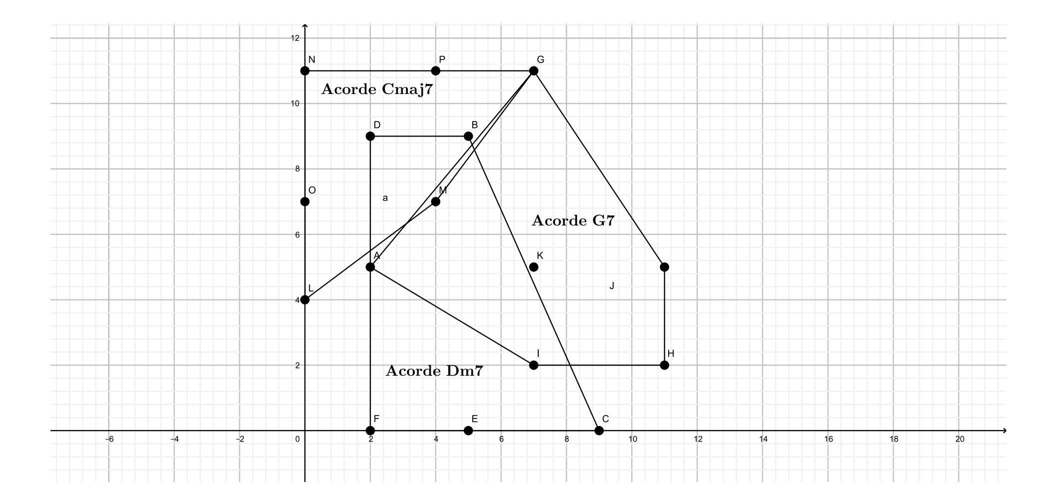


FIGURA 9. Progresión de jazz II - V - I en polígonos de Newton

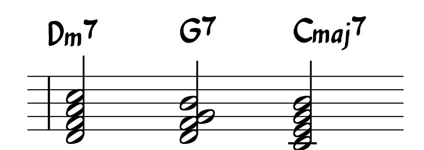


FIGURA 10. Progresión de jazz II-V-I

Sólo se analiza la clase de alturas y no la conducción vocal de la figura 10, tal y como en el ejemplo de la circunferencia de clases de tonos. La figura 9 muestra un único punto al interior. Cmaj7 y G7 son pentágonos, Dm7 es un cuadrilátero.

3.3. Sobre la combinatoria y otros polinomios. Las definiciones 3.6 y 3.7 asociando polinomios a partir de la idea de polígonos de Newton exploran la cualidad combinatoria del acorde, según se escucha. Las notas son percibidas en simultáneo, por lo que, los polinomios representan analógicamente -en cierta medida- las posibles combinaciones de dos en dos de los acordes teniendo como concepto base el de intervalo. ¿Qué otros polinomios podrían representar a los acordes? Se enumera, por ejemplo: $f = x^a y^a z^a + x^b y^b z^b + x^c y^c z^c \in \mathbb{Z}^3$. Y el análogo para acordes de 4 notas. La geometría de este polinomio como puntos en el espacio puede explorarse como la proyección en el plano que describe una recta que pasa por el origen (espacio vectorial).

Los polinomios también pueden extrapolarse a curvas planas tropicales cuyas hipersuperficies son el conjunto de ceros del polinomio[3]:

$$f = \sum_{i}^{n} a_{ij} X^i Y^j \longrightarrow p(x) = \bigoplus_{i,j} a_{ij} \odot X^i \odot Y^j$$

Los polinomios asociados a los acordes de esta forma también se adaptan por cambio de sus operaciones suma y producto:

$$p(x,y)_{\mathbb{T}G7} = x^7 \odot y^{11} \oplus x^{11} \odot y^2 \oplus x^2 \odot y^5 \oplus x^7 \odot y^2 \oplus x^{11} \odot y^5 \oplus x^7 \odot y^5$$

Los acordes de triada, vistos como líneas en el plano xy, toman la forma: $p(x,y)_{Em} = 4 \odot x \oplus 7 \odot y \oplus 11$. Como función que va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

$$(x,y) \mapsto \text{mín}(4 + x, 7 + y, 11)$$

Se grafica el acorde de C, Em y G en el plano real según [MS15]:

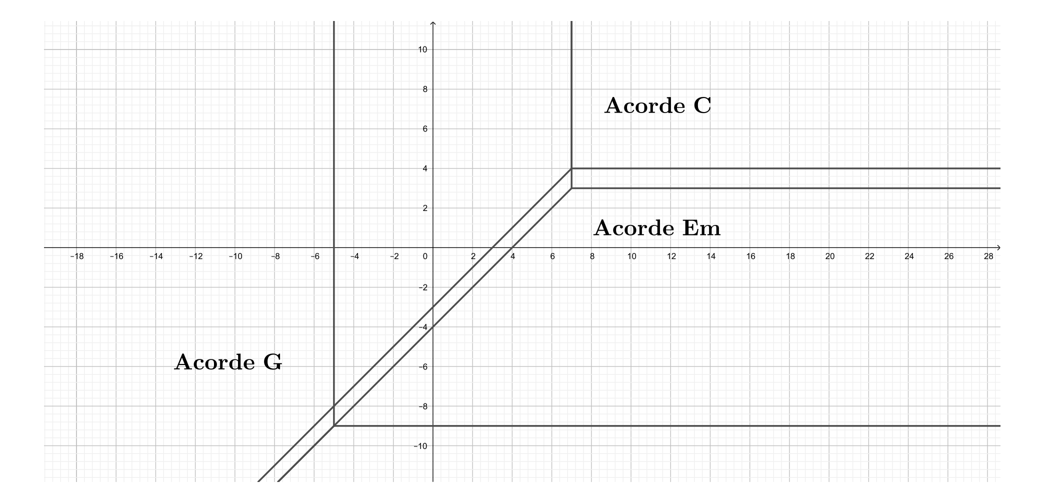


FIGURA 11. Acordes de triada como rectas tropicales

Existe una inecuación respecto a la teoría musical. Al trasladar al origen, todo acorde pierde su cualidad característica: son el mismo acorde ya sea mayor, menor, aumentado o disminuido. Los puntos desde los cuales se extienden las semirrectas correspondientes a C, Em y G son $(7,4), (7,3)$ y $(-5,-9)$. Estos acordes comparten dos notas en común agrupados así: {C y Em}, {Em y G}. Los acordes C y Em se intersecan infinitamente cuando la matriz de coeficientes se observa que una coordenada es idéntica (resta $c-a$ o $c-b$ de $p(x,y)$ = resta de coeficientes correspondientes a $q(x,y)$).

[3]El desarrollo de la gráfica embebida en $\mathbb{R}^2$ es realizable con Singular en la plataforma Linux

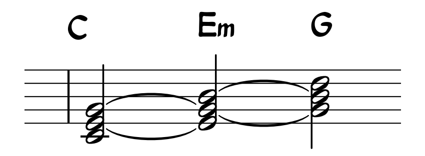


FIGURA 12. Progresión armónica C-Em-G con notas en común

La intersección de C y Em es el punto $(-5,-8)$. ¿Este punto es el origen de otro acorde? ¿Qué polinomios lo generan?

$$p(x,y)_{Fm} = 5\odot x \oplus 8\odot y \oplus 0 \Longleftrightarrow p(x,y)_{F\sharp m} = 6\odot x \oplus 9 \odot y \oplus 1$$
$$\Longleftrightarrow p(x,y)_{Gm} = 7\odot x \oplus 10\odot y \oplus 2 \Longleftrightarrow p(x,y)_{A\flat m} = 8\odot x \oplus 11\odot y \oplus 3$$

Dado que el entorno de acordes musicales se encuentra en $\mathbb{Z}_{12}$ también producen la misma gráfica los polinomios tropicales cuyos coeficientes le pertenecen ya que el punto origen $(-5,-8) \equiv (7,4)$ mód 12:

$$p(x,y)_{Cm} = 0\odot x \oplus 3\odot y \oplus 7 \equiv p(x,y)_{D\flat m} = 1\odot x \oplus 4\odot y \oplus 8 \equiv$$
$$p(x,y)_{Dm} = 2\odot x \oplus 5\odot y \oplus 9 \equiv p(x,y)_{E\flat m} = 3\odot x \oplus 6\odot y \oplus 10 \equiv$$
$$p(x,y)_{Em} = 4\odot x \oplus 7\odot y \oplus 11 \equiv \text{mód} 12$$

Con la congruencia en ambos sentidos, se tienen los siguientes polinomios:

$$p(x,y)_{Am} = 9\odot x \oplus 0\odot y \oplus 4 \equiv$$
$$p(x,y)_{B\flat m} = 10\odot x \oplus 1\odot y \oplus 5 \equiv$$
$$p(x,y)_{Bm} = 11\odot x \oplus 2\odot y \oplus 6 \equiv \text{mód} 12$$

Todos los acordes menores representan la misma gráfica del polinomio tropical en dos variables previsiblemente. Hasta el momento, se abre la posibilidad de graficar a todos los puntos en el primer cuadrante: o todos negativos en el tercer cuadrante, o mixtos como en el caso que sea el punto (-5, 4), en el segundo cuadrante, empleando las congruencias. Todo a partir de una intersección entre dos acordes.

4. MINKOWSKI, MATRICES Y VENTILADORES

Con los acordes Dm y G7 de la figura 9, se realizará la suma de Minkowski,[KK18], de 2 polígonos de Newton que representan acordes.

Definición 4.1. Sean Δf y Δg dos politopos convexos, la suma de Minkowski se define por:

$$\Delta f + \Delta g = \{F + G \mid F \in \Delta f, G \in \Delta g\}$$

Ejemplo 4.2 (Práctica)**.** Se suman el politopo de Dm7 y el de G7.

$$\Delta_{Dm7} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\Delta_{G7} = \left\{ \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} \right\}$$

¿Qué politopo convexo de cuántos lados es la suma de Minkowski de $\Delta_{Dm7} + \Delta_{G7}$? ¿Permite superponer politopos de acordes a modo de mosaico irregular?

El siguiente aspecto de asociación aproxima el análisis complejo. Sea la función

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (x, y) := (\log |z|, \log |w|) \end{aligned}$$

Definición 4.3. [**Ameba**] La ameba $\mathcal{A}$ de una variedad algebraica $X \subset \mathbb{C}^n$ es el conjunto: $\mathcal{A}(X) = -\log\ (X)$.

Con 4.3 se entiende una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ cuyos límites son descritos por una función de tipo analítica con un número de tentáculos que se extienden hacia el infinito [MS15, p. 22].

Ejemplo 4.4 (Acorde de séptima disminuida)**.** La ameba $\mathcal{A}$ de $f := xy+x+y-1 = 0 \subset \mathbb{C}^{*2}$ cuyos tentáculos al extenderse pasan por C, E, F♯ y A, forman la ameba $\mathcal{A}(Cdim7)$. La relación con el polígono de Newton se obtiene por un proceso llamado compactificación, según [Adr13, ejemplo 2.5], los tentáculos o ramos de la ameba son perpendiculares a los lados de los politopos de Newton de dimensión 2 asociados. En ese caso, el Δf de la ameba es un cuadrado.

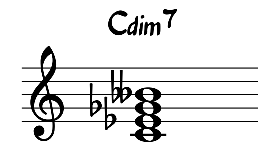


Figura 13. Acorde Cdim7

4.1. Transformaciones lineales tropicales en contrapunto.

En música de textura contrapuntística y serial se observa con notoriedad el desarrollo de motivos y melodías mediante simetrías. Las isometrías de un vector en $\mathbb{R}^2$ representan varios procedimientos usados por compositores de manera metódica. [MMP16, Capítulo 26] muestra 6 tipos de matrices que inducen una transformación en el plano y da una interpretación musical de ellas en [MMP16, Ejemplo 30]. ¿Es posible redefinir estas isometrías por su análogo tropical?

Definición 4.5. La función $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal tropical si cumple:

$$T(a \odot v \oplus b \odot w) = a \odot T(v) \oplus b \odot T(w)$$

para $a, b \in \mathbb{T}$ y $v, w \in V$.

La analogía por substitución de las operaciones binarias usuales por los de la aritmética tropical, dan cabida a varias preguntas: ¿Qué matrices $M_{m\times n}(\mathbb{T})$ representan alguna isometría como la retrogradación, retrogradación inversa o inversión musical? Por ejemplo, sea la transformación lineal tropical $T : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ definida por la matriz

$$T(v) = \begin{pmatrix} a \odot x \oplus b \odot y \\ c \odot x \oplus d \odot y \end{pmatrix}$$

¿Algunas matrices del conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vistas en [MMP16], tienen algún significado musical al aplicar esta substitución?

4.2. Ventiladores normales interiores. Como mencionan Kaveh y Khovanskii, [KK18, Figura 4], una variedad tropical de una línea tiene de soporte un 1-ventilador. Así, cada acorde de triada es, en cierta medida, un ventilador normal si se le define como recta tropical. Si los triángulos o cuadriláteros son los politopos con soporte real o complejo (exponentes de polinomios se representan en la circunferencia de tonos unitaria) se le puede asociar un ventilador normal y buscar una biyección con el sistema de acordes musicales.

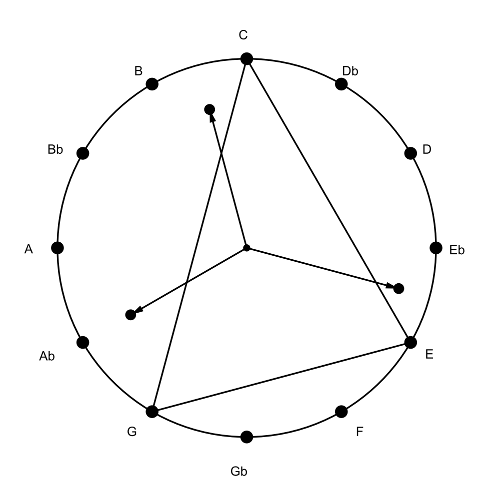


FIGURA 14. Acorde C y su ventilador normal interior

Definición 4.6. El conjunto de vectores normales respecto a las caras o lados del politopo de Newton Δf forma el ventilador normal interior.

Una de las representaciones geométricas de las notas usados en la teoría musical es el concepto de constelación de tonos que puede leerse en Lerdahl [Ler04]. Para este caso me limitaré a los acordes de tres notas.

Encontrar correspondencias entre los vectores normales y algún tipo de acorde como constelación. En algunos casos resulta que al rotar el ventilador corresponde con 2 notas. Por ejemplo, el ventilador normal interior del acorde Do mayor rotado corresponde con sus notas C y E. Con el acorde de Do séptima disminuida, al rotar el ventilador coinciden exactamente las notas C, E, G y A. Con el acorde de séptima C7(♯5), las rayos del ventilador corresponden y añaden al acorde: G♯ (añade D), B y F son añadidos, A y E♭ añadidos, C (añade F♯ o G♭).

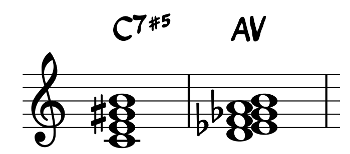


FIGURA 15. Acorde $C7^{\sharp 5}$ y el acorde ventilador

Se esperaría que el ventilador normal de la figura 15 arroje un resultado tonal común. Pero AV puede interpretarse como una especie de acorde de racimo, empleado en música jazz como una técnica pianística.

5. P-ádicos en la música

En el libro de introducción matemática para teóricos de la música [MMP16, Teorema 10], aparece la expresión de la forma normal ádica de un número. Los ejemplos sobre base hexadecimal indican su aplicación actual a la computación y representación de sonidos como su uso en ficheros midi.

Supongamos que el conjunto de distribuciones propuesto en [Ami16] como $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ para el caso $n = 12$ asocia a una escala modal (ver [BP13]), a partir de la suma de un acorde base y una triada como tensión.

El acorde $Cmaj7 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ es la expansión 2- ádica de un número. Por lo que: $Cmaj7 = 2193_{(10)}$ y $Dm = 580_{(10)}$, cuya suma es el modo Do jónico $= 2773_{(10)}$; cuya forma hexadecimal es AD5. Este ejemplo no tiene más profundidad que como una codificación o como ejercicio de manipulación, salvo se busque otras analogías.

¿Cómo se conectan de manera abstracta un objeto matemático y una expansión p-ádica? Se busca primero la analogía mediante el polígono de Newton de una expresión polinomial sobre $\mathbb{Q}_p$. El cuerpo de característica 0 de los números p-ádicos es un espacio ultramétrico (posee una norma no arquimediana) y es completo (toda sucesión de Cauchy dentro de sí converge).

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{n \geqslant -\infty} a_n p^n \mid a_n \in 0, 1, ..., p-1 \right\}$$

Definición 5.1 (Orden p-ádico)**.** Sea $a \in \mathbb{Z}$ y $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...\}$, el conjunto de los números primos . El orden p-ádico es la más alta potencia de p que divide al entero a:

$$\nu_p(a) := \; a \equiv 0 \text{ mód } p^n$$

En Koblitz, [Kob77], la notación usada es $ord_p(a)$.

El orden del conjunto característico de la armonía tonal no pertenece al conjunto de primos p, puede explorarse en sus respectivos sumandos primos como 2, 3, 5 o 7. Se tienen dos opciones: se busca el orden p-ádico de una sola nota $a \in \mathbb{Z}12$ o el de un acorde a de la distribución expresado en sistema decimal:

$$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}n} \longmapsto (a)10$$

En el primer caso, la circunferencia de tonos representa la distancia de los intervalos que exceden la octava. En aritmética modular, los enteros módulo 7 forman el cuerpo finito $\mathbb{F}_7$, sea la escala que se considere y asocie: do lidio, la dórico,etc.). Por ejemplo, para el modo jónico de Do $= \{C, D, E, F, G, A, B\}$ un intervalo de cuarta sobre una nota es igual a uno de oncena. Por ejemplo, la cuarta y oncena de la nota C es F, la cuarta y oncena de la nota E es A; esto sirve para hallar la nota congruente con intervalos muy grandes. Sin embargo, el orden p-ádico de una sola nota o de la distribución del acorde no tiene analogía alguna en lo musical: ¿Salvo en las amebas?

$$\nu 7(5) := \; 5 \equiv 0 \text{ mód } 7^n = 0 \approx \frac{\ln(5)}{\ln(7)}$$

Cuando $a = 0$, el órden es un número complejo. En $\mathbb{Z}_7$ la distribución de la triada Em $\{0, 0, 1, 0, 1, 0, 1\} \mapsto 21_{(10)}$, por lo que $\nu_7(21) := \; 21 \equiv 0 \text{ mód } 7^n = 3$. Para un acorde de séptima como $Dm7 = \{1, 1, 0, 1, 0, 1, 0\} \mapsto 106_{(10)}; \nu_7(106) := 21 \equiv 0 \text{ mód } 7^n = 0 \approx \frac{\ln(106)}{\ln(7)}$.

Definición 5.2 (Norma p-ádica)**.** Sea $x = \frac{a}{b}$. La norma $|\cdot|_p := \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{\frac{1}{\nu_p(x)}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Definición 5.3. Una norma que cumple $\|x+y\| \leqslant$ máx$(\|x\|,\|y\|)$, se dice no arquimediana. Una métrica es no arquimediana sobre un conjunto X si cumple $d(x,y) \leqslant$ máx$(d(x,z),d(z,y))$. La métrica inducida por la norma p-ádica $d_p(x,y) = |x-y|_p$ es no arquimediana.

Ejemplo 5.4. La valuación de una nota sobre otra y la distancia entre dos notas es la misma.$|\frac{2}{4}|_7 = 1$. O $d_7(3,5) = |5-3|_7 = |2|_7 = \frac{1}{7^0} = 1$.

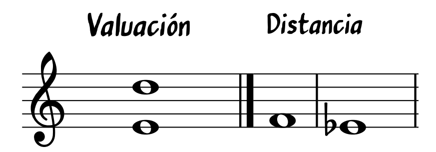


FIGURA 16. La valuación de una séptima y la distancia de una segunda

¿Cómo restringir el dominio para un análogo musical con la norma y métrica p-ádica?

5.1. Polígonos de Newton p-ádicos. Se hace la analogía respecto al entorno tropical y se busca encontrar el polígono de Newton que represente el acorde p-ádico. Se implementa el polígono de Newton para explorar el desenvolvimiento de los acordes a través de polinomios.

Definición 5.5 (Polígono de Newton p-ádico)**.** Sea $f(X) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \in 1 + XK[X]$ un polinomio de grado n con coeficientes en K, un campo local de valuación discreta. El polígono de Newton está determinado por la envolvente convexa de los puntos:

$$\Omega f = (i, \nu_p(a_i))$$

El término constante 1 queda fuera de la analogía empleada con los polinomios asociados a los acordes. Sin embargo, debe ser considerado un añadido formal. Se intentan en los ejemplos siguientes analogías para analizar.

Ejemplo 5.6. Supongamos que el polinomio asociado al acorde de triada de Gm $f(X) = 1 + 7X + 11X^2 + 2X^3 \in \mathbb{Q}_3[X]$. El polígono de Newton del polinomio 3-ádico de Gm es: $\Omega f = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}$.

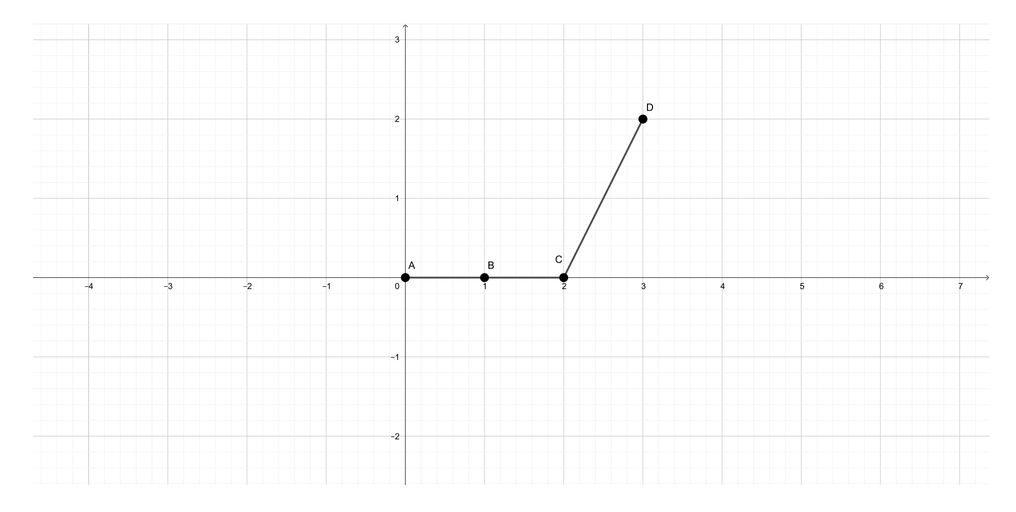


FIGURA 17. Ωf del acorde Dm sobre $\mathbb{Q}_3[X]$

La pendiente entre las notas F y A es $\frac{2-0}{3-2} = 2$. Las longitudes entre las notas son todas homogéneas con esta analogía ($a_{i1} - a_{i2} = 1, a_{i3} - a_{i2}, ..., a_n - a_{n-1} = 1$). El polinomio asociado al acorde de triada de F, posee una coordenada infinita bajo el órden 3-ádico, $f(X) = 1 + 5X + 9X^2 + 0X^3 \in \mathbb{Q}_3[X] \hookrightarrow \Omega f = \{(0,0),(1,0),(2,2),(3,\infty)\}$. Sobre el acorde de Dm, se asocia el polinomio $f(X) = 1 + 2X + 5X^2 + 9X^3 \in \mathbb{Q}_3[X] \hookrightarrow \Omega f = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,2)\}$.

Se construye para una valuación $\neq 0$ con el punto $\nu_2(a_i)$ un acorde que respeta también mód(12) en los 2-ádicos. El Ωf del acorde E7 omitiendo la 5°, $f(X) = 1 + 2X + 4X^2 + 8X^3$ se refleja en puntos enteros en el primer cuadrante.

En los 3-ádicos, se duplica la nota base del intervalo $f(x) = 1+3x+9x^2+243x^3 \in \mathbb{Q}_3[X] \hookrightarrow \Omega f = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$., E♭ - A♭, ya que $243 \equiv 3 \pmod{12}$. No obstante, el vértice es distinto en el soporte y en el orden correspondiente. Los coeficientes racionales deben modificarse para obtener puntos en el cuarto cuadrante. Suponga el monomio $f(X) = \frac{3}{9}X^3 \in \mathbb{Q}_3 \hookrightarrow \{(3,-1)\}$. Esto hace posible construir isometrías de los polígonos de newton vistos como líneas melódicas.

La subdivisión de los compases simples y compuestos, se efectúa de manera binaria y ternaria respectivamente [dPC96]. ¿La aplicación de la norma p-ádica analógica a la métrica según sea la división del compás musical asocia un grado de complejidad?

Ejemplo 5.7 (Asociación-compases simples $\mathbb{Q}_2$)**.** $\left|\frac{2}{4}\right|_2 = -1,\ \left|\frac{3}{4}\right|_2 = -2,\ \left|\frac{4}{4}\right|_2 = 0$

Ejemplo 5.8 (Asociación-compases compuestos $\mathbb{Q}_3$)**.** $\left|\frac{6}{8}\right|_3 = 0,\ \left|\frac{9}{8}\right|_3 = 2,\ \left|\frac{12}{8}\right|_3 = 0$

6. Conclusiones

El principal objetivo de este artículo ha sido permitir una nueva geometría símil a la empleada por el espacio de tonos, para acordes de 3 y 4 notas, con fines compositivos y analíticos. Para tal motivo, a través del polígono de Newton que induce un polinomio específico se pudo extender hacia el mundo tropical esta analogía.

Entre ellos se buscó un espacio de matrices isomorfas a estos polinomios con coeficientes reales o complejos asemejando el estudio usual del álgebra de matrices y el uso del cálculo diferencial e integral. Estas operaciones dieron una expresión algorítmica con similitudes para aplicarlas en el dominio musical.

Aunque la analogía geométrica ideal no es del todo precisa respecto a la definición rigurosa del polígono de Newton, puesto que sus soportes tendrían que ser enteros, se planteó diferentes modelos. La tropicalización de los polinomios mostró que son posibles diferentes analogías dependiendo la combinatoria y elección de los coeficientes o exponentes de los polinomios. Una forma de ver los acordes como rectas tropicales produjo su intersección en el plano real.

Se utilizó la noción de ameba para definir un entorno continuo del análisis complejo para los acordes. Determinadas amebas pueden en teoría, corresponder a un polinomio por su corte con el polígono de Newton correspondiente.

Con los ventiladores se buscó encontrar una compatibilidad entre los polígonos inscritos en la circunferencia de alturas de tonos y sus normales, encontrando incongruencias en las medidas angulares para relacionarlas por biyección con las constelaciones de tonos.

Por último, se planteó la analogía con el mundo p-ádico, tomando como partida el trabajo con los polinomios y sus combinatorias en lo tropical. Como segunda aproximación, se tomó el polígono de Newton en los campos 2 y 3-ádicos para los polinomios, explorando su combinatoria. El gráfico p-ádico de un acorde terminó siendo un segmento de recta poligonal. La dificultad radicó, también, en la presencia de una coordenada infinita dependiendo del campo. Al incluir los racionales en los coeficientes, se alteraron la dirección y pendiente del acorde p-ádico. Respecto a la

métrica musical, la analogía se dio a nivel simbólico en pro de una correspondencia biunívoca de complejidad de un compás simple frente a uno compuesto.

Se harán necesarios estudios adicionales en los cuales se realice una analogía más estricta respecto a los polígonos de Newton, de los polinomios tropicales y los acordes con su funcionamiento en el mundo musical, mostrando propiedades geométricas que permitan ir y venir entre ambos dominios dando soporte diferente a la creatividad compositiva o al análisis. Para los acordes definidos como polígonos con vértices en $\mathbb{Z}_{12}$, los ventiladores normales pueden ser estudiados junto a sus intersecciones. En el caso de las rectas tropicales que representan acordes, posicionar progresiones armónicas permitiría crear nuevas armonías a partir de polinomios inducidos por las intersecciones.

Es requerido también un estudio para definir las amebas a partir de los polinomios asociados a acordes por analogía, su tropicalización y realizar la compactificación o efectuar el proceso inverso con la idea fr que el polígono de Newton describe la compactificación de una ameba y estudiar las espinas de las amebas como constelaciones de tonos. La analogía de funciones analíticas racionales, encaja con el deseo de superponer dos polinomios a modo de poliacordes usados en el jazz.

Se precisa indagar en similitudes más estrictas entre los p-ádicos y el contexto natural de lo musical. Por ejemplo, una función $f : \mathbb{Z}12 \longrightarrow \mathbb{Q}12$, factible de descomponerse en cuerpos finitos de orden primo: $\mathbb{F}2 \times \mathbb{F}2 \times \mathbb{F}3 \longmapsto \mathbb{Q}2 \times \mathbb{Q}2 \times \mathbb{Q}3$. Se tiene la extensión del cuerpo $GF(2) := \{(0, 1, \boxplus, \boxtimes)\}$ en $GF(4) = \frac{GF(2)[X]}{X^2+X+1}$.

En una investigación futura se espera extender la aplicación tropical y p-ádica hacia politopos de Newton de dimensiones $n \geqslant 3$.

Referencias

[Adr13] Danko Adrovic. *Solving polynomial systems with tropical methods.* PhD thesis, 2013.

[Ami16] Emmanuel Amiot. *Music Through Fourier Space: Discrete Fourier Transform in Music Theory.* Springer, 2016.

[ASAALP+12] Flor Aceff-Sánchez, Octavio A Agustín-Aquino, E Lluis-Puebla, M Montiel, and J du Plessis. *An Introduction to Group Theory. Applications to Mathematical Music Theory.* Citeseer, 2012.

[Big13] Louis Bigo. *Représentations symboliques musicales et calcul spatial.* PhD thesis, Paris Est, 2013.

[BP13] Mattia G Bergomi and Alessandro Portaluri. Modes in modern music from a topological viewpoint. *arXiv preprint arXiv:1309.0687*, 2013.

[dPC96] Dionisio de Pedro Cursá. *Teoría completa de la música.* Real Musical, 1996.

[FN16] Thomas M Fiore and Thomas Noll. Voicing transformations and a linear representation of uniform triadic transformations. *arXiv preprint arXiv:1603.09636*, 2016.

[KK18] Kiumars Kaveh and AG Khovanskii. A short survey on newton polytopes, tropical geometry and ring of conditions of algebraic torus. *arXiv preprint arXiv:1803.07001*, 2018.

[Kob77] Neal Koblitz. *P-adic numbers.* Springer, 1977.

[Ler04] Fred Lerdahl. *Tonal pitch space.* Oxford University Press, 2004.

[Lew10] David Lewin. *Generalized musical intervals and transformations.* Oxford University Press, USA, 2010.

[MA07] Guerino Mazzola and Moreno Andreatta. Diagrams, gestures and formulae in music. *Journal of Mathematics and Music*, 1(1):23–46, 2007.

[Man18] Maria Mannone. Knots, music, and dna. *Journal of Creative Music Systems*, 2(2), 2018.

[Maz12] Guerino Mazzola. *The topos of music: geometric logic of concepts, theory, and performance.* Birkhäuser, 2012.

[MMP16] Guerino Mazzola, Maria Mannone, and Yan Pang. *Cool Math for Hot Music: A First Introduction to Mathematics for Music Theorists.* Springer, 2016.

[MS15] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*, volume 161. American Mathematical Soc., 2015.